

Sumário

Introdução	iii
Índice de figuras	xv
1 Noções primitivas	1
1.1 Notações	1
1.2 Postulados da existência	2
1.3 Pontos colineares	3
1.4 Postulado da determinação	3
1.5 Postulado da inclusão	4
1.6 Outras definições	5
1.7 Retas concorrentes	5
1.8 Teorema de existência	6
1.9 Os cinco postulados de Euclides	7
1.10 O papel de cada afirmação	8
1.11 Hipóteses, existência e unicidade	9
1.12 Verificação do percurso lógico	9
2 Segmentos	11
2.1 Segmento de reta	11
2.2 Segmentos consecutivos, colineares e adjacentes	13
2.3 Congruência de segmentos	14
2.4 Comparação de segmentos	16
2.5 Adição de segmentos	17
2.6 Ponto médio	17
2.7 Medida de um segmento (comprimento)	19
2.8 Distância entre dois pontos	19
3 Ângulos	21
3.1 Região convexa e côncava	21
3.2 Separação do plano e semiplanos	22
3.3 Ângulo	23
3.4 Ângulos consecutivos, adjacentes e opostos pelo vértice	25
3.5 Congruência e comparação de ângulos	26
3.6 Adição de ângulos	28
3.7 Bissetriz	29
3.8 Ângulo reto, agudo e obtuso	31
3.9 Medida (amplitude) de um ângulo	32
3.10 Unidade de medida: grau, minuto e segundo	33

3.11	Ângulos complementares e suplementares	34
4	Triângulos	37
4.1	Elementos	37
4.2	Interior e exterior	38
4.3	Classificação	39
4.4	Congruência de triângulos	41
4.5	Crítérios de congruência	41
4.6	Existência do ponto médio e da bissetriz	45
4.7	Mediana e bissetriz interna	47
4.8	Ângulo externo	49
4.9	Caso LAA _o	51
4.10	Congruência de triângulos retângulos (cateto-hipotenusa)	52
5	Paralelismo e perpendicularidade	55
5.1	Paralelismo	55
5.2	Existência da paralela	57
5.3	Construção da paralela	58
5.4	Unicidade da paralela	59
5.5	Ângulo externo e soma dos ângulos de um triângulo	61
5.6	Perpendicularidade	64
5.7	Existência e unicidade da perpendicular	66
5.8	Altura de um triângulo	68
5.9	Mediatriz de um segmento	69
5.10	Projeções e distância	70
5.11	Distância	75
5.12	Exercícios	77
6	Quadriláteros notáveis	79
6.1	Trapézio	81
6.2	Paralelogramo	82
6.3	Retângulo	83
6.4	Losango	83
6.5	Quadrado	84
6.6	Propriedades dos trapézios	85
6.7	Propriedades dos paralelogramos	87
6.8	Propriedades do retângulo	92
6.9	Losangos	94
7	Pontos notáveis do triângulo	97
7.1	Base média do triângulo	97
7.2	Paralelogramo de Varignon	99
7.3	Base média do trapézio	103
7.4	Baricentro	105
7.5	Incentro	108
7.6	Circuncentro	110
7.7	Ortocentro	112

8	Polígonos	117
8.1	Polígono simples	119
8.2	Polígono convexo e polígono côncavo	119
8.3	Interior e exterior de um polígono	120
8.4	Nome dos polígonos	122
8.5	Polígono regular	123
8.6	Diagonais	124
9	Circunferência e círculo	131
9.1	Corda, diâmetro e raio	132
9.2	Arco de circunferência e semicircunferência	133
9.3	Círculo	135
9.4	Setor circular, segmento circular e semicírculo	135
9.5	Posições relativas de reta e circunferência	137
9.6	Tangente	141
9.7	Exterior	143
9.8	Síntese das posições de reta e circunferência	143
9.9	Posições relativas de duas circunferências	144
9.10	Segmentos tangentes e quadriláteros circunscritíveis	146
9.11	Construções com régua e compasso	151
9.12	Circunferências associadas ao triângulo	154
9.13	Segmentos de tangência e semiperímetro	156
10	Ângulos na circunferência	159
10.1	Congruência, adição e desigualdade de arcos	159
10.2	Ângulo central	161
10.3	Ângulo inscrito	163
10.4	Ângulo inscrito numa semicircunferência	166
10.5	Construção de tangentes por um ponto exterior	168
10.6	Quadrilátero inscritível	170
10.7	Triângulo órtico e circunferências auxiliares	172
10.8	As alturas como bissetrizes do triângulo órtico	174
10.9	Casos obtusângulo e retângulo	176
10.10	Exercícios sobre o triângulo órtico	178
10.11	Ângulo de segmento	180
10.12	Arco capaz	181
10.13	Ângulos excêntricos	183
11	Teorema de Tales	187
11.1	Feixe, transversais e correspondência	187
11.2	Ordem dos pontos e divisão em partes iguais	188
11.3	Segmentos comensuráveis e incomensuráveis	190
11.4	Enunciado e demonstração do teorema de Tales	191
11.5	Razão entre segmentos correspondentes	194
11.6	Aplicações do teorema de Tales	194
12	Teoremas das bissetrizes	197
12.1	Bissetriz interna e divisão do lado	197
12.2	Cálculo das partes da base	199

12.3	Bissetriz externa e reta do lado oposto	201
12.4	Cálculos com a divisão externa	203
12.5	O caso do triângulo isósceles	204
12.6	Excentros do triângulo	205
12.7	Circunferências exinscritas e construção	207
12.8	Segmentos tangentes e comparação dos contatos	209
12.9	Verificação e continuidade	210
13	Semelhança de triângulos	213
13.1	Correspondência e razão de semelhança	213
13.2	Semelhança como relação de equivalência	215
13.3	Teorema fundamental da semelhança	216
13.4	Critério de semelhança AA	217
13.5	Critério de semelhança LAL	219
13.6	Critério de semelhança LLL	221
13.7	Perímetros e segmentos homólogos	222
13.8	Aplicações e verificação	225
13.9	Transformações e conservação de propriedades	225
13.10	Reflexão em uma reta	226
13.11	Translação e deslocamento comum	227
13.12	Rotação em torno de um ponto	229
13.13	Homotetia com fator positivo ou negativo	230
13.14	Aplicações e exercícios de transformações	231
13.15	Teorema de Ceva para cevianas internas	234
13.16	Aplicações da concorrência	235
13.17	Razões com sinal e posição dos pontos	236
13.18	Teorema de Menelau e recíproca	237
13.19	Ceva nas retas dos lados	240
13.20	Exercícios de concorrência e colinearidade	242
13.21	Reta de Euler	244
13.22	Simetrias do ortocentro	245
13.23	Circunferência dos nove pontos	247
13.24	Construção e configurações especiais	250
13.25	Exercícios sobre a reta de Euler e os nove pontos	253
14	Potência de ponto	255
14.1	Cordas, secantes e posição do ponto	255
14.2	Produto das partes de duas cordas	256
14.3	Produto de uma secante pela parte exterior	257
14.4	Constância do produto no caso interior	258
14.5	Relação entre secante e tangente	259
14.6	Potência, centro e convenção de sinal	260
14.7	Aplicações e verificação	262
14.8	Recíproca da potência de ponto	262
14.9	Por que a posição dos pontos importa	264
14.10	Reconhecimento de conciclicidade	265
14.11	Reconhecimento de uma tangente	267
14.12	Exercícios sobre as recíprocas	268

15 Triângulos retângulos	271
15.1 Catetos, hipotenusa, altura e projeções	271
15.2 Semelhanças no triângulo retângulo	272
15.3 Dedução das seis relações métricas	273
15.4 Média proporcional e interpretação das relações	275
15.5 Teorema de Pitágoras	276
15.6 Dependências entre as relações métricas	277
15.7 Recíproca do teorema de Pitágoras	278
15.8 Aplicações e verificação	279
16 Seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60°	281
16.1 Ângulo de referência e razões trigonométricas	281
16.2 Por que as razões dependem apenas do ângulo	282
16.3 Dedução dos valores de 45°	283
16.4 Dedução dos valores de 30° e 60°	284
16.5 Ângulos complementares e quadro dos valores	285
16.6 Aplicações e verificação	286
17 Triângulos pitagóricos	289
17.1 Triângulos e ternos pitagóricos	289
17.2 Da igualdade de Pitágoras a dois parâmetros	290
17.3 Uma fórmula para construir os ternos	291
17.4 Exemplos, múltiplos e ternos primitivos	292
17.5 Aplicações e verificação	294
18 Triângulos quaisquer	295
18.1 Seno e cosseno dos ângulos de um triângulo	295
18.2 Teorema dos senos	296
18.3 Projeções e relação métrica no caso agudo	299
18.4 Relação métrica no caso obtuso e caso reto	301
18.5 Teorema dos cossenos	302
18.6 Classificação pelo sinal do cosseno	303
18.7 Escolha da relação e exercícios	305
18.8 Potência com sinal e diferença de quadrados	307
18.9 Eixo radical de duas circunferências	308
18.10 Configurações e construção do eixo	310
18.11 Centro radical de três circunferências	312
18.12 Aplicações a tangentes e conciclicidade	313
18.13 Exercícios sobre eixo e centro radical	314
18.14 Teorema de Ptolomeu	317
18.15 Diagonais e aplicações de Ptolomeu	318
18.16 Bissetriz e ponto médio de um arco	320
18.17 Relação de Euler entre os raios	321
18.18 Desigualdade de Euler e casos especiais	323
18.19 Exercícios sobre Ptolomeu e os raios	324
19 Cálculo das medianas de um triângulo	327
19.1 Medianas e projeções	327
19.2 Dedução da fórmula de uma mediana	328

19.3	As três fórmulas e seus casos particulares	330
19.4	Cálculo pela lei dos cossenos	331
19.5	Aplicações e exercícios de conferência	333
20	Cálculo das alturas de um triângulo	335
20.1	Alturas e posições do pé	335
20.2	A projeção e o quadrado da altura	336
20.3	Fatoração em quatro fatores	337
20.4	Semiperímetro e fórmulas das três alturas	338
20.5	Exemplos e casos particulares	339
20.6	Exercícios de conferência	340
21	Relação de Stewart	343
21.1	O segmento e a divisão da base	343
21.2	Teorema e demonstração	344
21.3	Cálculo do comprimento de uma ceviana	345
21.4	Medianas, alturas e bissetrizes	346
21.5	Exercícios de conferência	347
22	Cálculo das bissetrizes internas de um triângulo	349
22.1	Bissetriz interna e notação	349
22.2	Divisão do lado oposto	350
22.3	Aplicação de Stewart e fatoração	350
22.4	Semiperímetro e as três fórmulas	351
22.5	Exemplo e casos particulares	352
22.6	Exercícios de conferência	355
23	Cálculo das bissetrizes externas de um triângulo	357
23.1	Bissetriz externa e segmento calculado	357
23.2	Divisão externa e ordem dos pontos	358
23.3	Aplicação de Stewart e fatoração	359
23.4	Semiperímetro e módulo	361
23.5	As três fórmulas e o caso isósceles	361
23.6	Exemplos de aplicação	362
23.7	Exercícios de conferência	363
24	Polígonos regulares	365
24.1	Regularidade e exemplos	365
24.2	Construção por arcos congruentes	366
24.3	A circunferência que passa pelos vértices	369
24.4	A circunferência tangente aos lados	371
24.5	Elementos notáveis	373
24.6	Diagonais que passam pelo centro	374
24.7	Aplicações e exercícios	375
25	Cálculo do lado e apótema dos polígonos regulares	379
25.1	Notação e relação fundamental	379
25.2	Quadrado	379
25.3	Hexágono regular	380

25.4	Triângulo equilátero	381
25.5	Decágono regular	384
25.6	Comparação e exercícios	386
26	Segmento áureo	389
26.1	Divisão de um segmento em seção áurea	389
26.2	A razão áurea e o lado do decágono	390
26.3	Lado do pentágono regular	391
26.4	Fórmula geral do apótema	393
26.5	Construção do polígono com o dobro de lados	395
26.6	Fórmula de duplicação e exemplos	396
26.7	Exercícios e verificação	397
26.8	Construção da divisão áurea	400
26.9	Construção do pentágono inscrito	401
26.10	Construção direta do decágono	403
26.11	Roteiro de duplicação dos lados	404
26.12	Famílias obtidas por duplicações sucessivas	405
26.13	Existência, exatidão e aproximação	406
26.14	Exercícios sobre construções de polígonos	407
27	Comprimento da circunferência	409
27.1	Polígonos inscritos e circunscritos	409
27.2	Crescimento do perímetro inscrito	410
27.3	Relação entre o lado e o novo apótema	411
27.4	Diminuição do perímetro circunscrito	412
27.5	A relação entre os perímetros	414
27.6	Método da exaustão	415
27.7	Continuidade e segmento retificante	418
27.8	Aproximações com controle do erro	419
27.9	Exercícios e verificação	421
28	π e o comprimento da circunferência	423
28.1	Triângulos fundamentais e semelhança	423
28.2	Razão entre perímetros e raios	424
28.3	Polígonos regulares inscritos	425
28.4	Perímetros de polígonos circunscritos	426
28.5	Polígonos regulares circunscritos	427
28.6	A constante universal e a fórmula do comprimento	428
28.7	Comprimento de um arco	430
28.8	Radianos e conversão de medidas	431
28.9	Exercícios e respostas comentadas	433
29	Equivalência plana	435
29.1	Regiões poligonais e polígonos contíguos	435
29.2	Soma de polígonos	436
29.3	Equivalência por decomposição	437
29.4	Propriedades da equivalência	438
29.5	A propriedade uniforme das somas	439
29.6	O postulado de De Zolt	440

29.7	Comparabilidade e tricotomia	441
29.8	Exercícios e respostas comentadas	444
30	Redução de polígonos por equivalência	447
30.1	Transformar uma figura por decomposição	447
30.2	Paralelogramos de mesma base e mesma altura	447
30.3	Do paralelogramo ao retângulo	450
30.4	Do triângulo ao paralelogramo	451
30.5	Triângulos entre as mesmas paralelas	452
30.6	Redução do número de lados	453
30.7	Do polígono ao retângulo	454
30.8	Aplicações e cuidados na construção	456
30.9	Exercícios e verificação	457
31	Áreas de superfícies planas	459
31.1	Da equivalência à medida de área	459
31.2	A função área e suas propriedades	460
31.3	Retângulos com uma dimensão comum	461
31.4	Comparação de dois retângulos quaisquer	463
31.5	Normalização e unicidade da medida	464
31.6	Igualdade de áreas e equivalência	465
31.7	Aplicações e unidades de medida	465
31.8	Exercícios e verificação	467
31.9	Construção do quadrado equivalente a um retângulo	469
31.10	Do polígono ao quadrado	470
31.11	Como reunir os recortes de uma cadeia	471
31.12	Uma decomposição em três peças retangulares	472
31.13	Uma decomposição com lado irracional	473
31.14	Exercícios sobre o quadrado equivalente	474
32	Áreas de polígonos	477
32.1	Retângulo	477
32.2	Quadrado	478
32.3	Paralelogramo	478
32.4	Triângulo	479
32.5	Área por dois lados e pelo ângulo compreendido	480
32.6	Área pelo semiperímetro e pelo raio inscrito	482
32.7	Área pelos lados e pelo raio circunscrito	483
32.8	Fórmula de Heron e escolha dos dados	484
32.9	Trapézio	486
32.10	Losango	487
32.11	Polígono regular	489
32.12	Escolha da fórmula e composição de áreas	491
32.13	Exercícios e verificação	493
32.14	Fórmula de Brahmagupta	497
32.15	Razões de áreas e bases sobre uma reta	499
32.16	Área do paralelogramo de Varignon	500
32.17	As seis áreas determinadas pelas medianas	501
32.18	Uma segunda demonstração de Ceva	502

32.19	Área e raios das circunferências exinscritas	504
32.20	Exercícios sobre quadriláteros e razões de áreas	506
33	Área do círculo e de suas partes	509
33.1	Área do círculo por aproximação	509
33.2	Área do setor circular	511
33.3	Fórmulas para arcos e ângulos	513
33.4	Área do segmento circular	514
33.5	Área da coroa circular	517
33.6	Aplicações e escolha da região	518
33.7	Exercícios e verificação	519
34	Razão entre áreas	521
34.1	Razão de semelhança e ordem da comparação	521
34.2	Entre dois triângulos semelhantes	522
34.3	Entre dois polígonos semelhantes	523
34.4	Comprimentos, perímetros e áreas	525
34.5	Aplicações e regiões compostas	526
34.6	Exercícios e verificação	528
	Encerramento	531
	Bibliografia	535

Capítulo 1

Noções primitivas

A geometria plana descreve relações entre pontos, retas e planos, bem como as figuras formadas por esses objetos. Para iniciar esse estudo, precisamos adotar algumas ideias básicas que servirão de apoio para as definições e os resultados dos próximos capítulos.

Adotaremos, sem definir, as noções de **ponto**, **reta** e **plano**, baseadas no conhecimento intuitivo. Elas são chamadas **noções primitivas** porque constituem o ponto de partida da teoria.

O percurso deste capítulo parte dessas três noções e organiza as relações mais básicas entre elas. Primeiro fixaremos uma notação. Em seguida, os postulados dirão quais objetos podemos considerar e como pontos determinam retas e planos. Somente depois dessa preparação definiremos figuras e retas concorrentes. Essa ordem permitirá demonstrar o primeiro teorema usando apenas ideias já estabelecidas.

1.1 Notações

Como ponto, reta e plano são objetos de naturezas diferentes, adotaremos letras de famílias diferentes para reconhecê-los rapidamente nas fórmulas e nas figuras.

- **Ponto:** $A, B, C, \dots$ (letras latinas maiúsculas);
- **Reta:** $a, b, c, \dots$ (letras latinas minúsculas);
- **Plano:** $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \sigma, \dots$ (letras gregas minúsculas).

Graficamente, representamos o ponto, a reta e o plano como na figura a seguir. Esses desenhos funcionam como modelos visuais dos objetos geométricos. O ponto é indicado por uma pequena marca, a reta por um traço que deve ser imaginado como ilimitado nos dois sentidos e o plano por uma região que também se estende além da parte desenhada.

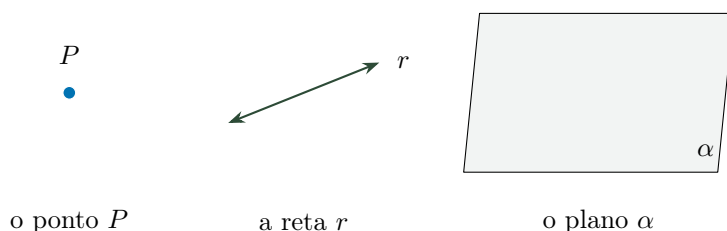


Figura 1: Representações gráficas de ponto, reta e plano.

Para registrar a relação entre um ponto e uma reta ou entre um ponto e um plano, usaremos os símbolos $\in$ e $\notin$. A escrita $A \in r$ indica que o ponto A pertence à reta r ,

Definição 1.8. Duas retas r e s são **concorrentes** se, e somente se, existe um ponto P tal que $r \cap s = \{P\}$.

Em linguagem corrente, retas concorrentes se encontram num único ponto. Esse ponto pertence simultaneamente às duas retas e é chamado **ponto de interseção**. A figura abaixo representa essa situação.

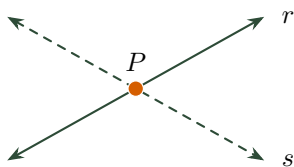


Figura 8: Retas concorrentes: $r \cap s = \{P\}$.

1.8 Teorema de existência

A definição anterior esclarece o significado de retas concorrentes, mas uma definição, sozinha, não garante que existam objetos com a propriedade definida. Agora podemos usar os postulados da existência e da determinação para construir duas retas e verificar que elas satisfazem exatamente essa definição.

Teorema 1.9 (de existência). *Existem retas concorrentes.*

Demonstração. Consideremos uma reta r . Pelo postulado da existência, podemos escolher um ponto $P \in r$ e um ponto $Q \notin r$. Esses pontos são distintos. De fato, se fossem coincidentes, Q também pertenceria a r , contrariando a escolha de Q .

Como $P \neq Q$, o postulado da determinação fornece a única reta $s = \overleftrightarrow{PQ}$. As retas r e s são distintas, pois $Q \in s$ e $Q \notin r$. Ao mesmo tempo, P pertence às duas, de modo que elas possuem pelo menos um ponto comum.

Resta verificar que esse ponto comum é único. Suponha que exista outro ponto $X \neq P$ pertencente a r e a s . As duas retas passariam pelos pontos distintos P e X . Pela unicidade afirmada no postulado da determinação, ambas teriam de ser a reta $\overleftrightarrow{PX}$ e, portanto, teríamos $r = s$. Isso contradiz a distinção já obtida. Logo, não existe tal ponto X , $r \cap s = \{P\}$ e as retas são concorrentes. ■

A construção usa o primeiro postulado para obter os pontos P e Q . Depois, usa o segundo para construir s e para provar a unicidade do ponto de interseção. O teorema mostra, assim, como uma definição se torna aplicável por meio dos postulados anteriores.

distinguir pontos internos e externos e acompanhar a ordem de pontos escolhidos numa mesma reta.

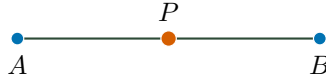


Figura 11: O ponto P está entre A e B .

Definição 2.2 (segmento de reta). Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um **segmento de reta**.

Dados A e B , com $A \neq B$:

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X \mid X \text{ está entre } A \text{ e } B\}.$$

Se $A = B$, convencionamos que $\overline{AA} = \{A\}$ e chamamos esse conjunto de **segmento nulo**.

Assim, $\overline{AB}$ representa um conjunto de pontos, e A e B são suas **extremidades**. Pela simetria do item 6 do Postulado 2.1, os pontos entre A e B são exatamente os pontos entre B e A . Como as extremidades também são as mesmas, $\overline{AB} = \overline{BA}$.

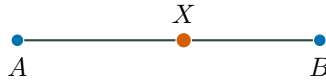


Figura 12: O segmento $\overline{AB}$.

Um segmento termina em suas duas extremidades. Quando desejamos conservar uma origem e prolongar a figura indefinidamente em apenas um sentido, obtemos uma semirreta.

Definição 2.3 (semirreta). Sejam A e B pontos, com $A \neq B$. A **semirreta** de origem A que passa por B é

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X \mid B \text{ está entre } A \text{ e } X\}.$$

Isto é, a semirreta $\overrightarrow{AB}$ reúne o segmento $\overline{AB}$ com os pontos que estão além de B .

Na notação de semirreta, a primeira letra indica a origem. Pelo item 8 do Postulado 2.1, existe X tal que B está entre A e X . Esse ponto pertence a $\overrightarrow{AB}$ e, pelas regras de ordem, não pertence a $\overrightarrow{BA}$. Portanto, $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$.



Figura 13: A semirreta $\overrightarrow{AB}$.

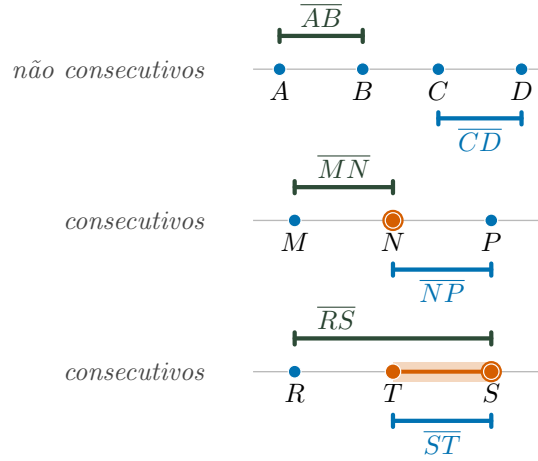


Figura 16: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ colineares não consecutivos; $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$, $\overline{RS}$ e $\overline{ST}$ colineares e consecutivos.

Definição 2.7 (segmentos adjacentes). Dois segmentos consecutivos e colineares são **adjacentes** se, e somente se, possuem em comum apenas uma das extremidades.

Assim, $\overline{MN} \cap \overline{NP} = \{N\}$ (adjacentes), enquanto $\overline{RS} \cap \overline{ST} = \overline{ST}$ (não adjacentes).

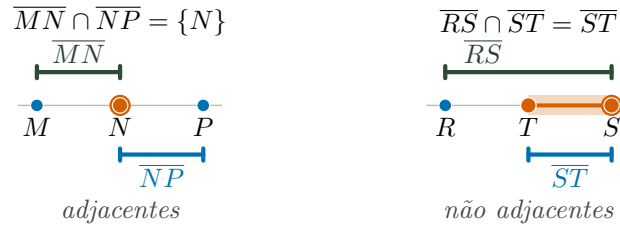


Figura 17: $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ adjacentes; $\overline{RS}$ e $\overline{ST}$ não adjacentes.

Em resumo, segmentos adjacentes têm exatamente uma extremidade comum e se estendem, a partir dela, em sentidos opostos da mesma reta.

2.3 Congruência de segmentos

As classificações anteriores descrevem posição. Para comparar tamanhos sem recorrer ainda a números ou unidades de medida, usamos a congruência: dois segmentos congruentes têm o mesmo tamanho, embora possam ocupar posições diferentes. Como o comprimento numérico só será definido mais adiante, a congruência é tomada aqui como noção primitiva.

2.4 Comparação de segmentos

Para decidir qual de dois segmentos é maior, transportamos um deles para a mesma origem e a mesma direção do outro. Desse modo, a comparação de tamanho se reduz à posição relativa de suas extremidades. Os símbolos $<$ e $>$ são lidos como “menor que” e “maior que”, respectivamente.

Dados dois segmentos não nulos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, pelo postulado do transporte (Postulado 2.8, item 4) podemos obter na semirreta $\overrightarrow{AB}$ um ponto $P \neq A$ tal que $\overline{AP} \equiv \overline{CD}$. A condição $P \neq A$ decorre de $\overline{CD}$ ser não nulo. Há três casos mutuamente exclusivos.

1. P está entre A e B . Neste caso, dizemos $\overline{AB} > \overline{CD}$.
2. P coincide com B . Neste caso, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.
3. B está entre A e P . Neste caso, $\overline{AB} < \overline{CD}$.

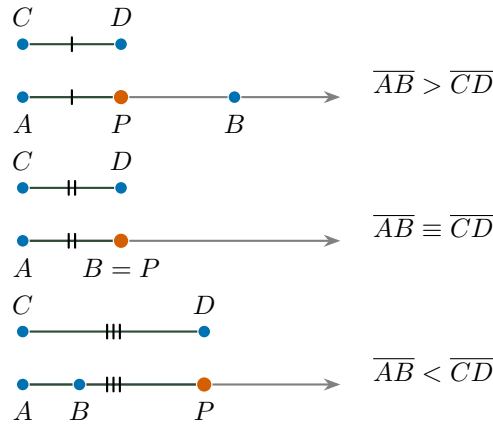


Figura 20: As três hipóteses da comparação: $\overline{AB} > \overline{CD}$, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AB} < \overline{CD}$ (com $\overline{AP} \equiv \overline{CD}$).

Os casos são exaustivos pela definição de semirreta e pelas regras de ordem. Para verificarmos que a comparação independe dos representantes, copiemos $\overline{AB}$ e $\overline{AP}$ para outra semirreta com a mesma origem entre si. Se P está entre A e B , a preservação da ordem coloca a cópia de P antes da cópia de B ; se B está entre A e P , ocorre a ordem inversa. Se $P = B$, a unicidade do transporte faz as cópias coincidirem. Pela transitividade da congruência, substituir $\overline{CD}$ por um segmento congruente fornece a mesma cópia de $\overline{AP}$. Assim, cada uma das três relações permanece inalterada.

Podemos agora verificar a transitividade. Suponhamos que um primeiro segmento seja maior que um segundo, e este maior que um terceiro. Copiemos os três numa mesma semirreta de origem O , com extremidades U , V e W , respectivamente. Pela invariância recém-demonstrada, V está entre O e U , e W está entre O e V . Os quatro pontos são distintos. De fato, as duas relações de estar entre já distinguem os pontos envolvidos, e $W = U$ faria U e V estarem, cada um, entre O e o outro, contrariando o item 7 do Postulado 2.1. A ordenação de quatro pontos coloca W entre O e U . Portanto, o primeiro segmento é maior que o terceiro.

2.7 Medida de um segmento (comprimento)

Até aqui, congruência, comparação e adição foram tratadas geometricamente. Para calcular com segmentos, fixamos um segmento não nulo U como unidade. Admitimos a existência de uma função de medida real m , definida nos segmentos, com $m(U) = 1$, positiva nos segmentos não nulos, nula nos segmentos nulos e com as propriedades apresentadas a seguir. A construção geral dessa função não será desenvolvida neste volume.

Definição 2.12 (medida de um segmento). Se $A \neq B$, a **medida** de $\overline{AB}$, denotada $m(\overline{AB})$ ou AB , é um número real positivo tal que:

1. segmentos congruentes têm medidas iguais e, reciprocamente, segmentos com medidas iguais são congruentes: $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \iff m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$;
2. $\overline{AB} > \overline{CD} \iff m(\overline{AB}) > m(\overline{CD})$;
3. $\overline{RS} = \overline{AB} + \overline{CD} \iff m(\overline{RS}) = m(\overline{AB}) + m(\overline{CD})$.

À medida dá-se o nome de **comprimento**. Para o segmento nulo, convencionamos $m(\overline{AA}) = AA = 0$. Em geral, associa-se um número a um segmento comparando-o com outro segmento previamente escolhido como unidade; o número obtido expressa quantas unidades, ou partes da unidade, cabem no segmento medido.

Na Figura 25, cabem três unidades inteiras e meia unidade em $\overline{AB}$. Se a unidade escolhida for o centímetro, teremos $AB = 3,5$ cm.

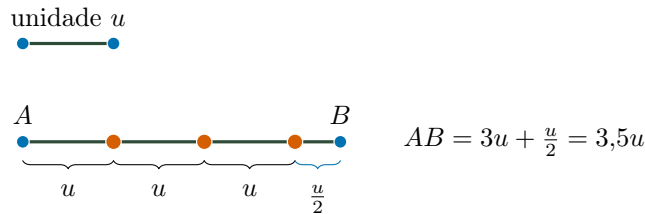


Figura 25: Medir um segmento é compará-lo com a unidade escolhida: $AB = 3,5u$.

É importante não confundir o objeto com seu valor numérico: $\overline{AB}$ denota o segmento, enquanto AB denota seu comprimento. As propriedades da definição mostram que a medida traduz para os números as relações já construídas: congruência torna-se igualdade, comparação torna-se desigualdade e adição de segmentos torna-se adição de números.

2.8 Distância entre dois pontos

O segmento determinado por dois pontos liga geometricamente esses pontos; seu comprimento informa numericamente quão afastados eles estão. Isso dá origem a duas maneiras compatíveis de falar em distância.

Definição 3.8 (ângulos adjacentes). Dois ângulos consecutivos são **adjacentes** se, e somente se, não têm pontos internos comuns.

Assim, o primeiro par da figura é adjacente, enquanto o segundo é apenas consecutivo. A adjacência permitirá somar aberturas lado a lado sem contar uma região sobreposta duas vezes.

Outra configuração surge quando duas retas se cruzam. Cada uma determina duas semirretas opostas a partir do ponto comum.

Definição 3.9 (ângulos opostos pelo vértice (O.P.V.)). Dois ângulos são **opostos pelo vértice** se, e somente se, os lados de um deles são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro.

Se $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ são opostas e $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ são opostas, então $\widehat{AOB}$ e $\widehat{COD}$ são O.P.V. Eles têm o mesmo vértice e nenhum lado comum. Mais adiante, ao estudar suplementos, demonstraremos que suas aberturas são congruentes.

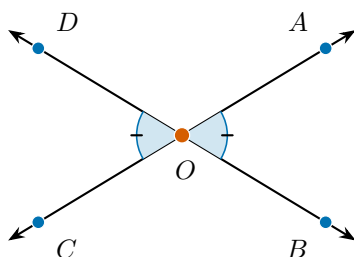


Figura 34: Ângulos opostos pelo vértice: $\widehat{AOB}$ e $\widehat{COD}$.

3.5 Congruência e comparação de ângulos

Para comparar aberturas, usamos a congruência de ângulos. Ela desempenha o mesmo papel que a congruência de segmentos no capítulo anterior e independe da posição da figura no plano.

Postulado 3.10 (da congruência de ângulos). A congruência ($\equiv$) entre ângulos é uma noção primitiva que satisfaz:

1. Reflexividade: $\widehat{ab} \equiv \widehat{ab}$;
2. Simetria: $\widehat{ab} \equiv \widehat{cd} \implies \widehat{cd} \equiv \widehat{ab}$;
3. Transitividade: $\widehat{ab} \equiv \widehat{cd}$ e $\widehat{cd} \equiv \widehat{ef} \implies \widehat{ab} \equiv \widehat{ef}$.

Cada ângulo é congruente a si mesmo; a relação vale nos dois sentidos; e ângulos congruentes a um mesmo ângulo são congruentes entre si. Essas propriedades permitem reconhecer uma mesma abertura em desenhos diferentes.

Para comparar dois ângulos em posições distintas, precisamos copiar um deles junto ao outro. O transporte exige três escolhas prévias: o vértice, um dos lados e o lado da reta

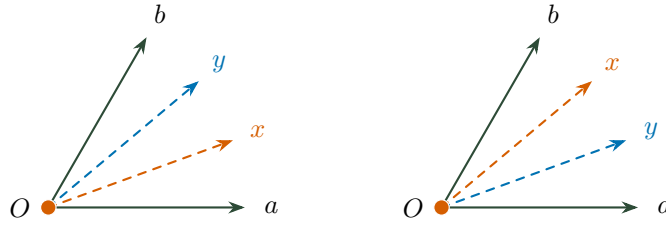


Figura 42: Os dois casos possíveis para a ordem de $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{Oy}$ na prova da unicidade.

O teorema impede duas divisões distintas em metades congruentes. A existência de uma divisão desse tipo exige uma construção, que ficará disponível com a congruência de triângulos.

Observação 3.16. A existência da bissetriz será provada depois (ver Teorema 4.13).

3.8 Ângulo reto, agudo e obtuso

Precisamos agora de uma abertura de referência. Para encontrá-la, prolongamos um lado de um ângulo no sentido oposto e comparamos as duas aberturas adjacentes assim formadas.

Definição 3.17 (ângulo suplementar adjacente). Dado $A\hat{O}B$, seja $\overrightarrow{OC}$ a semirreta oposta a $\overrightarrow{OA}$. O ângulo $B\hat{O}C$ é chamado **suplementar adjacente** de $A\hat{O}B$.

Os dois ângulos têm o lado $\overrightarrow{OB}$ em comum, interiores separados e lados restantes opostos. Seus setores, reunidos, preenchem um semiplano fechado.

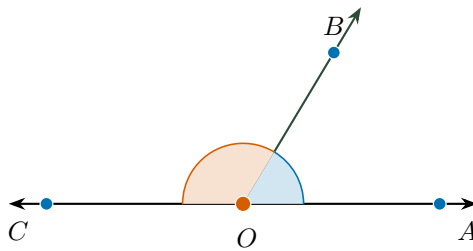


Figura 43: $B\hat{O}C$ é o suplementar adjacente de $A\hat{O}B$ ($\overrightarrow{OC}$ oposta a $\overrightarrow{OA}$).

Quando as duas aberturas dessa divisão são congruentes, cada uma recebe o nome de ângulo reto.

Definição 3.18 (ângulo reto). **Ângulo reto** é todo ângulo congruente a seu suplementar adjacente.

Assim, o ângulo reto corresponde a uma das duas partes congruentes em que um semiplano é dividido. Sua existência será demonstrada no Teorema 5.14. Adotamos aqui,

como postulado, a congruência de todos os ângulos retos, conforme o quarto postulado de Euclides apresentado no capítulo 1. Podemos, portanto, escolher qualquer um deles como referência.

Definição 3.19 (ângulo agudo). **Ângulo agudo** é um ângulo menor do que um ângulo reto.

Ao transportar um ângulo agudo para dentro de um reto, com um lado comum e no mesmo semiplano, o outro lado fica no interior do reto. A abertura ainda não alcança a referência.

Definição 3.20 (ângulo obtuso). **Ângulo obtuso** é um ângulo maior do que um ângulo reto.

O ângulo obtuso ultrapassa essa referência. Consideramos aqui ângulos de lados não colineares e seus setores convexos; os setores côncavos pertencem à outra região determinada pelos mesmos lados.

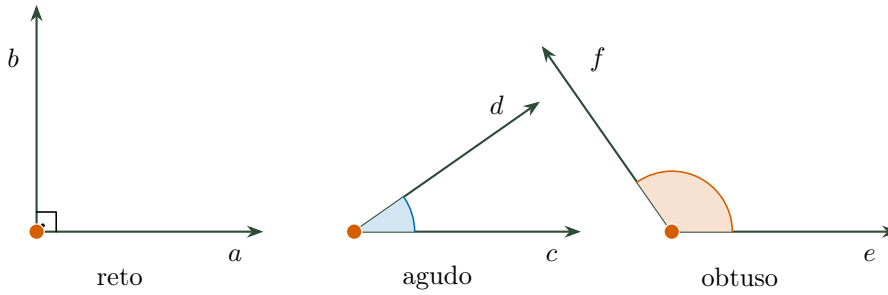


Figura 44: Ângulo reto ($\widehat{ab}$), ângulo agudo ($\widehat{cd}$) e ângulo obtuso ($\widehat{ef}$).

3.9 Medida (amplitude) de um ângulo

Até agora, a abertura foi comparada por congruência e transporte. Como fizemos com o comprimento de segmentos, admitiremos uma medida numérica que preserve a congruência, a ordem e a adição geométrica.

Definição 3.21 (medida de um ângulo). Fixada uma unidade angular, a **medida** de um ângulo $A\hat{O}B$ de lados não colineares é um número real positivo $m(A\hat{O}B)$ que satisfaz:

1. $A\hat{O}B \equiv C\hat{P}D \iff m(A\hat{O}B) = m(C\hat{P}D)$;
2. $A\hat{O}B > C\hat{P}D \implies m(A\hat{O}B) > m(C\hat{P}D)$;
3. $\widehat{rt} = \widehat{ab} + \widehat{cd} \implies m(\widehat{rt}) = m(\widehat{ab}) + m(\widehat{cd})$.

A medida também é chamada **amplitude**. O símbolo $A\hat{O}B$ identifica o ângulo; $m(A\hat{O}B)$

identifica o número que o mede na unidade escolhida. Na terceira propriedade, a soma numérica corresponde à composição geométrica descrita anteriormente.

Podemos, por exemplo, expressar numericamente a função da bissetriz. Se c divide $\widehat{ab}$ em duas partes congruentes, ambas têm a mesma medida e sua soma é a medida total. Portanto,

$$m(\widehat{ac}) = m(\widehat{cb}) = \frac{m(\widehat{ab})}{2}.$$

A fórmula traduz numericamente a divisão ao meio. A seção seguinte fixa a unidade para os cálculos.

3.10 Unidade de medida: grau, minuto e segundo

Adotaremos o sistema sexagesimal. Nele, o ângulo reto recebe a medida de noventa graus, e cada unidade pode ser subdividida para representar aberturas menores.

Definição 3.22 (grau). O **ângulo de um grau**, indicado por 1° , é o submúltiplo segundo 90 de um ângulo reto. Em termos de medida, cada uma de noventa partes congruentes de um ângulo reto mede 1° .

A divisão em partes iguais descreve a escolha da unidade, sem afirmar que qualquer dessas divisões já foi construída pelos procedimentos geométricos estudados. Como todos os ângulos retos são congruentes, a unidade independe do reto escolhido.

Um ângulo reto mede 90° . Ao reunir dois retos adjacentes, seus lados externos são opostos e seus setores formam um semiplano. Chamamos essa abertura de **ângulo raso**, com medida 180° . Estendemos a aditividade da medida a qualquer divisão desse semiplano por uma semirreta interna: as medidas dos dois ângulos suplementares adjacentes somam 180° . Para o caso de lados coincidentes, adotamos o **ângulo nulo**, com medida 0° .

Esses dois casos ampliam a definição inicial, que exigia lados não colineares. Para uma amplitude θ correspondente ao setor convexo, admitindo os casos limites, temos

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ.$$

Os ângulos da definição inicial satisfazem as desigualdades estritas. Assim, o agudo tem medida entre 0° e 90° , e o obtuso entre 90° e 180° , sem incluir as extremidades desses intervalos.

Para lados não colineares, há também o setor côncavo. Uma volta reúne dois rasos e mede 360° ; a abertura restante, correspondente ao setor côncavo, mede $360^\circ - \theta$. O intervalo anterior refere-se apenas ao setor convexo.

Na Figura 45, os mesmos lados delimitam uma abertura convexa de 60° e uma côncava de 300° . Juntas, elas completam 360° .